Y. E. Avezova

About Primitiveness of Cyclic Matrices

Key words: circulant, primitiveness, exponent of matrice

Any nonnegative square matrice A is called primitive if for some $t \geq 1$ the matrice A^t has no entries equal to 0. A right (left) circulant of order n is a matrice of order n such that each row of the matrice is obtained by the cyclic shift of the previous row one step to the right (to the left). In this article such matrices are explicitly described, conditions of primitiveness of right and left circulants are received.

Я. Э. Авезова

О ПРИМИТИВНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ МАТРИЦ

1. Элементарные свойства циркулянтов

Пусть $A = (a_{ij})$ есть правый циркулянт порядка n с порождающим вектором $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Заметим, что $a_{ij} = \alpha_{j-i+1}$, $i, j = 1, \ldots, n$ (сложение в индексах производится по модулю n).

Пусть $B = (b_{ij})$ есть левый циркулянт порядка n с порождающим вектором $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \beta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_n & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Замечание 1. Левый циркулянт является симметричной матрицей, то есть $B = B^T$.

Замечание 2. Левый циркулянт перестановкой строк приводится к правому циркулянту, то есть $A = P \cdot B$, где P — некоторая подстановочная матрица порядка n.

При изучении правых циркулянтов существенную роль играет следующая подстановочная матрица порядка n:

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Если A — правый циркулянт порядка n с порождающим вектором $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то справедливо соотношение:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_n^{k-1} \qquad (4)$$

с матрицей P_n из (3).

Периодом циркулянта A называется такое наименьшее положительное число m, для которого циклический сдвиг влево (вправо) на m шагов координат порождающего вектора оставляет этот вектор без изменения. Очевидно, что период есть делитель порядка циркулянта n и либо совпадает с n, либо не превосходит $n/2$.

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть циркулянт $A = (a_{ij})$ порядка n имеет период m. Тогда $A = J_{qq} \times D$, где $q = n/m$, а D — циркулянт порядка m с периодом, равным также m.

Таким образом, изучение циркулянтов в значительной степени сводится к рассмотрению циркулянтов, период которых совпадает с их порядком.

2. Циркулянт как матрица смежности орграфа

Утверждение 2.1. Граф Г, матрица смежности A которого — циркулянт, является псевдосимметрическим. Если A — левый циркулянт, то Г — симметрический граф.

Замечание 3. Если в орграфе Г есть путь из вершины i в вершину k, а из вершины k в вершину j, то в орграфе существует путь из вершины i в вершину j.

Лемма 1. Пусть левый циркулянт A является матрицей смежности графа Г. Тогда, если в Г есть путь из вершины v в вершину u, то в Г есть путь из вершины u в вершину v.

Утверждение 2.2. Пусть левый циркулянт A является матрицей смежности графа Г. Если из некоторой вершины в Г существует путь во все остальные вершины, то Г сильно связный.

Определение 1. Циркулянт называется *сильно связным*, если он является матрицей смежности сильно связного орграфа.

3. Примитивность циркулянтов

Определение 2. Назовем циркулянт с периодом, равным n, и порождающим вектором веса не меньше 2 *позитивным циркулянтом*.

Утверждение 3.1. Если циркулянт $A = (a_{ij})$ примитивен, то $\exp A \le n-1$.

3.1. Условия примитивности правых циркулянтов

Утверждение 3.2. Пусть $A = (a_{ij})$ — позитивный правый циркулянт порядка n. Если n простое, то A примитивна.

Утверждение 3.3. Пусть $A = (a_{ij})$ — позитивный правый циркулянт с порождающим вектором $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, таким, что $\alpha_1 = 1$, и существует хотя бы одно $\alpha_i = 1$, такое, что НОД($i-1$, n) = 1, $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Тогда A примитивна.

3.2. Условия примитивности левых циркулянтов

Утверждение 3.4. Пусть $A = (a_{ij})$ — позитивный сильно связный левый циркулянт. Если в графе Г(A) есть цикл нечетной длины, то A примитивна.

Утверждение 3.5. Позитивный сильно связный левый циркулянт нечетного порядка примитивен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000. — 448 с.
2. *Когос К. Г., Фомичев В. М.* Положительные свойства неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4 (18). С. 116–121.

REFERENCES:

1. *Sachkov V.N., Tarakanov V.E.* Kombinatorika neotricatelnih matric. M.: TVP, 2000. — 448 p.
2. *Kogos K.G., Fomichev V.M.* Polojitelnie svoystva neotricatelnih matric // Prikladnaya diskretnaya matematika. 2012. № 4 (18). P. 116–121.

I. M. Azymshin, V. O. Chukanov

The Methods of Determining the Probability of Appearance of Error for Modified Reliability Models of Software by Jelinski — Moranda and Schick — Wolverton

Key words: software reliability

In the modified models Jelinski — Moranda and Schick-Wolverton probabilities of errors are used. This article discusses the definitions of these probabilities.

И. М. Азымшин, В. О. Чуканов

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ ОШИБОК ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПО ДЖЕЛИНСКОГО – МОРАНДЫ И ШИКА – ВОЛВЕРТОНА

В модифицированной модели Джелинского — Моранды и модифицированной модели Шика — Волвертона [1] используются вероятности возникновения ошибок. В данной статье рассматривается вопрос определения этих вероятностей.

В результате проведенных исследований опытным путем было доказано, что соотношение количества ошибок, возникших в результате исправления, ранее обнаруженных, константно на небольшом промежутке времени.

$$\frac{a}{i} = const ,$$

где a — количество ошибок, возникших в результате исправления, ранее обнаруженных;

i — общее число исправляемых ошибок.

Из этого утверждения и полученных данных следует, что соотношение количества единичных ошибок к общему числу исправляемых ошибок константно. Аналогично для двоичных, троичных и более ошибок.

$$P_j = \frac{a_j}{i},$$