М. А. Куприяшин, Г. И. Борзунов

СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТИ БАЗОВОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

Несмотря на то что многие из предложенных алгоритмов решения задачи о рюкзаке оказались нестойкими или не применимыми на практике из-за большого объема необходимых вычислений [1], в настоящее время продолжаются исследования, направленные на усовершенствование этих алгоритмов (см., например: [2]). Как показано в работе [3], в этих исследованиях важную роль играют базовые алгоритмы, что делает актуальным их анализ и совершенствование.

Пусть существует набор вещей, каждая из которых имеет определенный положительный вес. Требуется найти способ укладки части этих вещей в рюкзак таким образом, чтобы вес рюкзака равнялся наперед заданному значению ω. Упорядоченное множество весов вещей называется рюкзачным вектором $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots a_n)$. Далее можно задать бинарный вектор $\vec{v}$ длины n таким образом, что при $v_i = 1$ предмет с номером i помещается в рюкзак, а при $v_i = 0$ этот предмет в состав рюкзака не входит. Используя данную систему обозначений, можно сформулировать задачу о рюкзаке: найти все возможные значения вектора $\vec{v}$, при которых выполняется: $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \omega$.

Задача о рюкзаке (в общем случае) считается NP-полной [2], то есть все известные алгоритмы ее решения имеют экспоненциальную временную сложность. В частности, в случае конструктивного перечисления всех возможных значений вектора $\vec{v}$ с проверкой каждого из них требуется анализ 2^n значений этого вектора. Проверка каждого потребует n операций умножения, $n-1$ операций сложения и 1 операцию сравнения (для проверки совпадения полученного веса со значением ω). Таким образом, временная сложность составляет $T = 2^n \cdot 2n$ операций.

Анализ значений вектора $\vec{v}$ на принадлежность множеству возможных решений позволяет сократить сложность решения задачи: если для вектора $\vec{v}_k$ суммарный вес набора предметов равен или превосходит ω, то можно не рассматривать векторы большего веса $\vec{v}_z$, для которых выполнено: $\vec{v}_{k_i} = 1 \Rightarrow \vec{v}_{z_i} = 1; i = \overline{1,n}$. Определим граф $G(\vec{v})$, в качестве вершин которого выступают все возможные значения вектора $\vec{v}$. Пусть каждая вершина размещается на ярусе, номер которого совпадает с числом единичных координат в соответствующем значении вектора $\vec{v}$. Ребра соединяют вершины $\vec{v}_k$ и $\vec{v}_z$ тогда и только тогда, когда вершина $\vec{v}_k$ размещена на некотором ярусе i, а вершина $\vec{v}_z$ — на следующем ярусе $i+1$, и указанные векторы различаются только одной координатой, следующей за последней единичной координатой вектора $\vec{v}_k$: в векторе $\vec{v}_k$ значение этой координаты равно 0, а в векторе $\vec{v}_z$ равно 1. Например, между вершинами 1010 и 1011 имеется ребро, а между 1010 и 1110 — нет. Вершина 1000 связана с 1100, 1010 и 1001. Граф $G(\vec{v})$ при $n = 4$ представлен на рис.1.

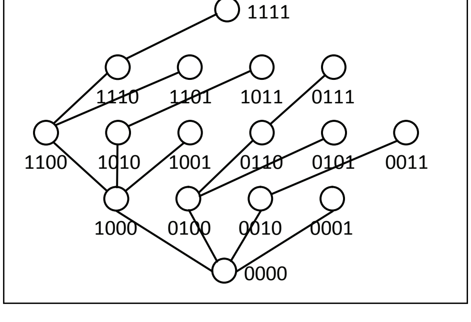

Рис. 1. Граф G($\vec{v}$) для вектора $\vec{v}$ размерности 4

При движении вдоль цепи, начинающейся в нулевой вершине, вес рюкзака может только увеличиваться. Поэтому если для определенной вершины вес рюкзака превысит ω, то можно утверждать, что в продолжении данной цепи решений нет. Это позволяет сократить количество рассматриваемых при переборе решений путем обхода графа $G(\vec{v})$ в глубину из вершины $00\ldots0$ и отсеивания всех вершин, соединенных цепью с вершинами меньшего яруса, которым соответствует рюкзак весом более ω. Пример отсечения ветвей перебора при ω=*12*, $\vec{a} = (9;7;5;3)$ представлен на рис. 2.

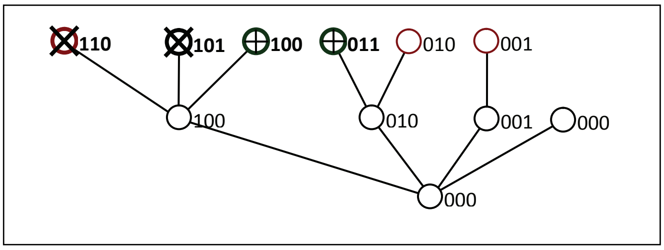

Рис. 2. Пример отсечения ветвей перебора при ω=*12;* $\vec{a} = (9;7;5;3)$

Знаком «Х» обозначены вершины, в которых вес рюкзака превысил ω. Знаком «+» обозначены вершины, оказавшиеся решениями. Всего потребовалось обойти 11 вершин из 16. Таким образом, временная сложность решения задачи о рюкзаке понижается на 31 % по сравнению с методом полного перебора, что соответствует коэффициенту ускорения 1,45. Следует отметить, что эта величина ускорения существенно зависит от весов предметов и значения ω. Результаты исследования этой зависимости будут представлены в следующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Шнайер Б.* Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. М.: Триумф, 2003. — 816 с.
2. *Мурин Д. М.* Компьютерно-аналитическое исследование задач рюкзачного типа как средство анализа и совершенствования систем защиты информации. АКД. Томск: НИТГУ, 2013. — 22 с.
3. *Борзунов Г. И., Войнов А. Е., Сучкова Е. А.* Выбор базового алгоритма для расчета минимального количества процессоров, обеспечивающего достижение заданного значения коэффициента ускорения // Безопасность информационных технологий. 2010. № 1. С. 45–46.