Г. А. Остапенко

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА РИСКОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЩЕРБОВ В ИХ КОМПОНЕНТАХ

Как известно, информационные атаки на системы, а также сбои их компонентов вызывают разнообразные отказы, наносящие ущерб и обуславливающие соответствующие риски. Полагая синхронные отказы компонентов информационной системы событиями малосовместимыми (практически асинхронными, т. е. исключающими друг друга), оценку общего риска представляется возможным [1] осуществить с помощью следующего выражения

$$Risk = \sum_{i=1}^{n} Risk_i\,(u) \tag{1}$$

где $Risk_1$ — оценка риска, осуществленная независимо для i-го компонента системы;
u — значение ущерба, возможность появления которого положена в основу риск-модели.

В целях детализации последнего выражения и поиска алгоритмов управления риском рассмотрим случай, когда риск-оценка для компонентов системы допускает использование логнормального закона в качестве шаблона распределения плотности вероятности возникновения ущерба

$$\varphi_i(u) = \frac{1}{u\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right], \tag{2}$$

где y = ln u, т.е. задается логарифмический масштаб ущерба;
σ_i и m_i — соответственно дисперсия и матожидание ущерба в i-й компоненте системы.

Следует заметить, что логнормальное распределение имеет вполне реальный физический смысл, ибо определено на луче ущербов $[0, \infty)$ [2]. При этом данный шаблон, в отличие от других законов экспоненциального семейства распределений, весьма удобен для управления, так как имеет две степени свободы (дисперсия и матожидание), независимое регулирование которых (путем настройки средств защиты компонента) открывает широкие перспективы задания общего риска системы с помощью вышеуказанного (1) выражения. Попытаемся продемонстрировать это на простейшем примере, когда система состоит из двух компонентов, подчиняющихся закону (2). В этом случае имеем:

$$Risk_1(u) = u\varphi_1(u) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right];$$

$$Risk_2(u) = u\varphi_2(u) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right].$$

Для лаконичности выкладок положим, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда

$$\mathbf{Risk}_\Sigma(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left[-\frac{(y-m_1)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma^2}\right]\right]. \tag{3}$$

Графически ситуацию (3) иллюстрирует рис. 1, где представлены кривые рисков компонентов и функция суммарного риска системы. Максимумы рисков компонентов находятся в координатах m_1 и m_2 соответственно. Что же касается экстремумов суммарного риска, то их три и они не совпадают с вышеуказанными максимумами. Попытаемся их определить.

Для этого традиционно следует найти производную от выражения (3) и приравнять ее к нулю. Реализуя эти операции, получаем уравнение

$$\frac{(m_1 - y)}{\sigma^2}Risk_1 + \frac{(m_2 - y)}{\sigma^2}Risk_2 = 0$$

или

$$(m_1 - y)\exp\left[-\frac{(y - m_1)^2}{2\sigma^2}\right] + (m_2 - y)\exp\left[-\frac{(y - m_2)^2}{2\sigma^2}\right] = 0. \qquad (4)$$

Решением последнего уравнения является $y_1 = m_1 + x_{21}$, так как первый максимум смещается вправо. Найдем отсюда поправку x_{21}, вносимую второй компонентой, с помощью уравнения

$$[(m_1 + x_{21}) - m]\exp\left[-\frac{(m_1 + x_{21} - m_2)^2}{2\sigma^2}\right] + [m_2 - (m_1 + x_{21})]\exp\left[-\frac{(m_1 + x_{21} - m_2)^2}{2\sigma^2}\right] =$$
$$= x_{21}\exp\left[-\frac{x_{21}^2}{2\sigma^2}\right] + (\Delta m - x_{21})\exp\left[-\frac{(\Delta m - x_{21})^2}{2\sigma^2}\right] =$$
$$= x_{21}\exp\left[-\frac{x_{21}^2}{2\sigma^2}\right] + (\Delta m - x_{21})\exp\left[-\frac{\Delta m^2}{2\sigma^2}\right]\exp\left[-\frac{2\Delta m x_{21}}{2\sigma^2}\right]\exp\left[-\frac{x_{21}^2}{2\sigma^2}\right] = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что при $x_{21} = 0$ оно не имеет решения. Упрощая его, имеем

$$x_{21} + (\Delta m - x_{21})\exp\left[-\frac{\Delta m^2}{2\sigma^2}\right]\exp\left[\frac{2\Delta m x_{21}}{2\sigma^2}\right] = 0$$

или

$$x_{21}\exp\left[\frac{\Delta m^2}{2\sigma^2}\right] + (\Delta m - x_{21})\exp\left[\frac{2\Delta m x_{21}}{2\sigma^2}\right] = 0,$$

где $\Delta m = m_2 - m_1$. Далее уместно разложить экспоненту в ряд, ограничившись первыми тремя членами, что даст уравнение третьей степени, имеющее решение в радикалах

$$ax_{21}^4 + bx_{21}^3 + cx_{21}^2 + dx_{21} + e = 0,$$

где $a = -\frac{\Delta m^3}{6\sigma^6}$; $b = \frac{\Delta m^4}{6\sigma^6} - \frac{\Delta m^2}{2\sigma^4}$;

$c = \frac{\Delta m^3}{2\sigma^4} - \frac{\Delta m}{\sigma^2}$; $d = \exp\left[\frac{\Delta m^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{\Delta m^2}{\sigma^2} - 1$; $e = \Delta m$

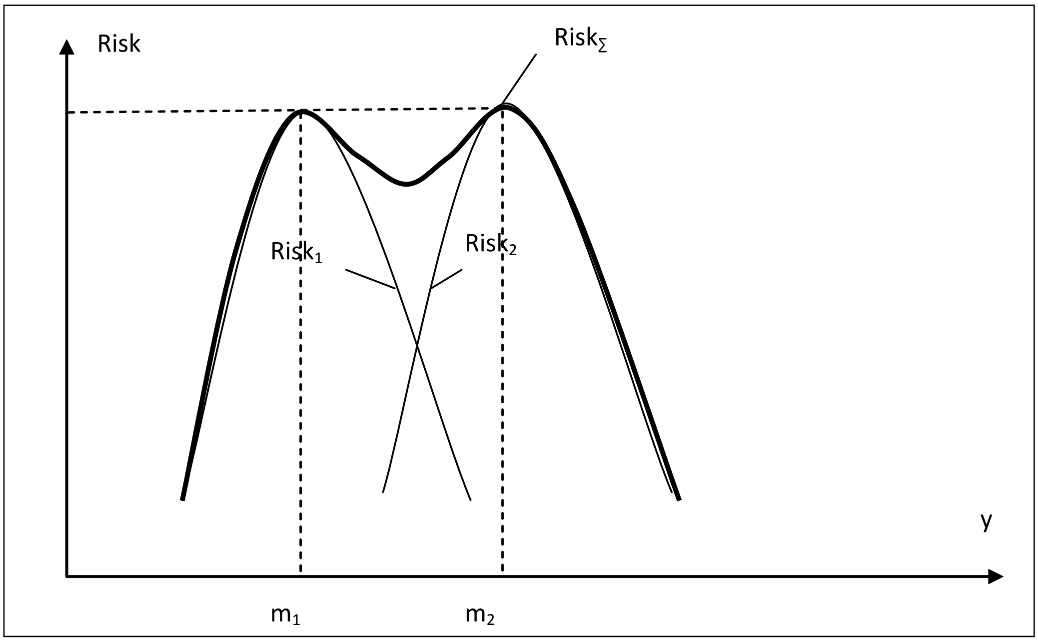

Рис. 1. Интегральная оценка риска для системы, состоящей из двух компонентов

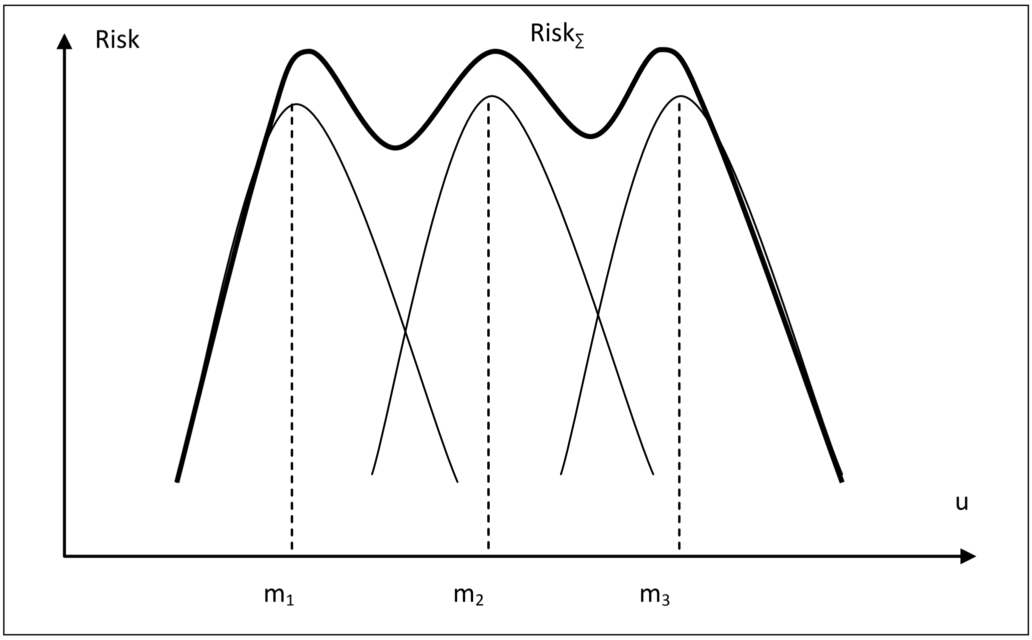

Рис. 2. Общий риск системы, включающей три компонента

Следует заметить, что с ростом Δm поправка x_{21} будет убывать. Для поправки x_{12}, вносимой для максимума в окрестности m_2, получается аналогичное (зеркальное) выражение. По аналогии для n компонентов имеем уравнения:

$$y_1 = m_1 + x_{21} + x_{31} + \ldots + x_{n1};$$
$$y_2 = -x_{12} + m_2 + x_{32} + \ldots + x_{n2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = -x_{1n} - x_{2n} - x_{3n} - \ldots - m_n.$$

Что же касается третьего экстремума (минимума), то он предположительно находится в зоне $y_0 = \frac{m_2 + m_1}{2}$. Для проверки этого предположения осуществим подстановку y_0 в выражение (4)

$$\left(m_1 - \frac{m_2 + m_1}{2}\right)\exp\left[-\frac{\left(\frac{m_2 + m_1}{2} - m_1\right)^2}{2\sigma^2}\right] + \left(m_2 - \frac{m_2 + m_1}{2}\right)\exp\left[-\frac{\left(\frac{m_2 + m_1}{2} - m_2\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$= \left(\frac{m_1}{2} - \frac{m_2}{2}\right)\exp\left[-\frac{(m_2 - m_1)^2}{8\sigma^2}\right] + \left(\frac{m_2}{2} - \frac{m_1}{2}\right)\exp\left[-\frac{(m_2 - m_1)^2}{8\sigma^2}\right] = 0.$$

Значения пиков общего риска могут быть определены следующим образом:

$$Risk_{\Sigma max1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left[-\frac{x_{21}^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(m_1 + x_2 - m_2)^2}{2\sigma^2}\right]\right];$$

$$Risk_{\Sigma max2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left[-\frac{(m_2 - x_{12} - m_1)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{x_{12}^2}{2\sigma^2}\right]\right];$$

$$Risk_{\Sigma min} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[2\exp\left[-\frac{(m_2 - m_1)^2}{8\sigma^2}\right]\right].$$

Полученные выражения могут служить основой для управления общим риском системы, состоящей из нескольких элементов. Представляется возможным обеспечить постоянство (с заданной неравномерностью) риска в определенном диапазоне ущербов (рис. 2). Пример системы из трех компонентов (рис. 2), очевидно, может быть развит на произвольное количество элементов (экстремумов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Остапенко Г. А., Маслихов П. А., Субботина Е. В.* Способы регулирования рисков распределенных систем // Информация и безопасность: Науч.-техн. журнал. Воронеж, 2010. Вып. 3. С. 435–438.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 2003. – 464 с.