Ю. П. Кулябичев, Н. А. Крицына, Р. В. Коновалов

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ ПО СКОЛЬЗЯЩЕЙ ВЫБОРКЕ ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМА

С целью повышения безопасности хранения больших объемов цифровой информации часто используются процедуры сжатия информации, позволяющей существенно снизить объем требуемой памяти и, как следствие, избежать искажений хранимой информации от воздействия случайных и активных помех.

При этом возникает задача представления данных в виде формализованной модели, в частности, в качестве такой формализованной модели может быть использован временной ряд, параметры которого должны быть идентифицированы в процессе сжатия информации. Учитывая, что оценивание параметров регрессионного-авторегрессионного объекта (РАР-объект), частным случаем которого является временной ряд [1], осуществляется на основе последовательно поступающих данных, наиболее привлекательными методами оценивания параметров являются рекуррентные методы оценивания [2], в частности рекуррентная форма метода наименьших квадратов. Основной недостаток традиционного рекуррентного подхода состоит в том, что вне зависимости от времени поступления вся накопленная информация участвует в процедуре оценивания с одинаковыми весами. Очевидно, даже при медленно меняющихся параметрах такой подход неприемлем. Хорошо известный в настоящее время метод экспоненциального взвешивания не дает желаемых результатов, так как обладает высокой чувствительностью к выбору весового коэффициента, учитывающего степень «старения» информации. Применение методов стохастической динамической фильтрации сопряжено с необходимостью использования дополнительной информации о динамике изменения параметров временного ряда, а также информации о статистических характеристиках шумов, действующих в идентифицируемой системе. В связи с этим имеет смысл рассмотреть рекуррентный алгоритм, основанный на использовании только последних N измерений.

В настоящей работе предлагается рекуррентный алгоритм оценивания параметров линейного РАР-объекта по скользящей выборке заданного объема.

Пусть РАР-объект представлен в дискретно-разностной форме

$$y(i)+\sum_{j=1}^{n} a_j y(i-j)=\sum_{j=0}^{n} b_j u(i-j)+\sum_{j=0}^{n} d_j \eta(i-j),$$

где $y(i)$, и $u(i)$ — значения «выхода» и «входа» идентифицируемого объекта в момент времени i, параметры объекта $a_j, b_j, d_j, \overline{(0,1)}$ подлежат идентификации, шум $\eta(i)$ имеет следующие статистические характеристики:

$M\{\eta(i)\}=0$, $\operatorname{cov}\{\eta(i)\eta(j)\}=\sigma_\eta^2(i)\delta_K(i-j)$, δ_K — символ Кронекера.

Соответствующая оптимальная настраиваемая модель, обеспечивающая несмещенные, состоятельные в среднеквадратичном оценки параметров РАР-объекта, имеет вид [3]:

$$\tilde{y}(i)=-\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j y(i-j)+\sum_{j=0}^{n}\tilde{b}_j u(i-j)+\sum_{j=1}^{n}(\tilde{d}_l/\tilde{d}_0)]y(i-j)-\tilde{y}(i-j)].$$

Введем вектор наблюдений «входа» модели

$$\bar{z}^{\mathrm{T}}(i)=(-y(i-1),\ldots,-y(i-n),u(i),\ldots,u(i-n),$$
$$y(i-1)-\tilde{y}(i-1),\ldots,y(i-n)-\tilde{y}(i-n)$$

и вектор оценок параметров

$$\tilde{\bar{c}}^{\mathrm{T}}=\left(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_n,\tilde{b}_0,\ldots,\tilde{b}_n,\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_0},\ldots,\frac{\tilde{d}_n}{\tilde{d}_0}\right).$$

Тогда уравнение модели можно переписать в векторной форме:
$\tilde{y}(i) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i)\tilde{\tilde{c}}$.

Как было отмечено выше, будем искать оценку параметров по N $(N \geq (n + (n + 1) + n))$ последним измерениям. Причем на каждом шаге рекуррентного процесса добавляется l новых измерений, а l старых выводятся из процесса идентификации.

Тогда на $k = \mathrm{int}(i/l)$ шаге процесса идентификации матрица «входов» $U(k)$ может быть представлена в виде блочного объединения двух матриц:

- $U_0(k)$ – матрицы размерности $[(l) \times (n + (n + 1) + n)]$, которая будет удалена на следующем $k + 1$ шаге процесса идентификации;
- $U_1(k)$ – матрицы размерности $[(N - l) \times (n + (n + 1) + n)]$, которая будет сохранена на следующем $k + 1$ шаге процесса идентификации.

Таким образом, матрица $U(k)$ имеет блочный вид
$U(k) = \begin{bmatrix} U_0(k) \\ U_1(k) \end{bmatrix}$,
очевидно, размерность этой матрицы будет $[(N) \times (n + (n + 1) + n)]$.

С другой стороны, матрица «входов» $U(k + 1)$ на шаге $k + 1$ также может быть представлена в виде объединения двух матриц:

- $U_2(k + 1) = U_1(k)$ – матрицы размерности $[(N - l) \times (n + (n + 1) + n)]$, которая сохранена с предыдущего k-го шага процесса идентификации;
- $U_3(k + 1)$ – матрицы размерности $[(l) \times (n + (n + 1) + n)]$, которая будет добавлена на $k + 1$ шаге процесса идентификации.

В результате матрица $U(k + 1)$ будет иметь вид

$$U(k+1) = \begin{bmatrix} U_2(k+1) \\ U_3(k+1) \end{bmatrix} \text{ или } U(k+1) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_3(k+1) \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Строками матриц $U_0(k)$, $U_1(k)$, $U_2(k+1)$, $U_3(k+1)$ являются транспонированные вектора $\bar{z}^{\mathrm{T}}$ в соответствующие моменты времени.

Аналогичным образом можно сформировать блочные вектора «выхода» на k и $k + 1$ шагах процесса идентификации:

$$\bar{y}(k) = \begin{bmatrix} \bar{y}_0(k) \\ \bar{y}_1(k) \end{bmatrix} \text{ и } \bar{y}(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) \\ \bar{y}_3(k+1) \end{bmatrix}.$$

Вектора «выхода» $\bar{y}_0(k)$, $\bar{y}_1(k)$, $\bar{y}_3(k+1)$ имеют тот же смысл, что и соответствующие матрицы «входа».

Как известно, при использовании метода наименьших квадратов оценка параметров линейного объекта по N измерениям с учетом введенных обозначений на k-м и $k+1$-м шагах процесса идентификации будет иметь вид [2]:

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k) = (U(k)^{\mathrm{T}} R(k) U(k))^{-1} U(k)^{\mathrm{T}} R(k) \bar{y}(k); \qquad (2)$$

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1) = (U(k+1)^{\mathrm{T}} R(k+1) U(k+1))^{-1} U(k+1)^{\mathrm{T}} R(k+1) \bar{y}(k+1). \qquad (3)$$

Введем вспомогательную оценку $\hat{\boldsymbol{c}}^*_{ls}(k+1)$, вычисленную на основе матрицы «входа» $U_1(k)$ и вектора «выхода» $\bar{y}_1(k)$

$$\hat{\boldsymbol{c}}^*_{ls}(k+1) = (U_1(k)^{\mathrm{T}} R_1(k) U_1(k))^{-1} U_1(k)^{\mathrm{T}} R_1(k) \bar{y}_1(k). \qquad (4)$$

$R(k)$, $R(k+1)$, $R_1(k+1)$ – матрицы весовых коэффициентов соответствующих размерностей. Естественно, для существования единственности решения необходимо выполнение условия $N - l \geq 3n + 1$.

Обозначим

$U^{\mathrm{T}}(k)R(k)U(k) = P^{-1}(k)$;

$U^{\mathrm{T}}(k)R(k)\overline{y}(k) = \overline{q}(k)$;

$U^{\mathrm{T}}(k+1)R(k+1)U(k+1) = P^{-1}(k+1)$;

$U^{\mathrm{T}}(k+1)R(k+1)\overline{y}(k+1) = \overline{q}(k+1)$;

$U_1{}^{\mathrm{T}}(k)R_1(k)U_1(k) = P^{*-1}(k)$;

$U_1{}^{\mathrm{T}}(k)R_1\text{`}(k)\overline{y}_1(k) = \overline{q}^{*}(k)$.

Используя эти обозначения, формулы для оценок (2), (3), (4) можно записать в виде:

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k) = P(k)\overline{q}(k); \quad (5.а)$$

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1) = P(k+1)\overline{q}(k+1); \quad (5.б)$$

$$\hat{\boldsymbol{c}}^{*}_{ls}(k) = P^{*}(k)\overline{q}^{*}(k). \quad (5.в)$$

Учитывая, что матрицы $U^{\mathrm{T}}(k)$, $R(k)$ и вектор $\overline{y}(k)$ являются блочными, и осуществляя несложные матричные преобразования, можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$P^{*-1}(k) = P^{-1}(k) - U_0{}^{\mathrm{T}}(k)R_0(k)U_0(k); \quad (6.а)$$

$$\overline{q}^{*}(k) = \overline{q}(k) - U_0{}^{\mathrm{T}}(k)R_0\text{`}(k)\overline{y}_0(k) \quad (6.б)$$

или, используя соотношение (5.а), последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\overline{q}^{*}(k) = P(k)^{-1}\,\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k) - U_0{}^{\mathrm{T}}(k)R_0\text{`}(k)\overline{y}_0(k). \quad (7)$$

Применяя известное матричное тождество для обращаемых матриц [2], выражение для матрицы $P^{*}(k+1)$ можно записать в виде:

$$P^{*}(k) = P(k) + P(k)U_0{}^{\mathrm{T}}(k)[R_0^{-1}(k) - U_0(k)P(k)U_0{}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}U_0(k)P(k). \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в формулу (5.в) и произведя элементарные матричные преобразования, получим рекуррентную формулу для вспомогательной оценки

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{c}}^{*}_{ls}(k) = \hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k) - P(k)U_0{}^{\mathrm{T}}(k)[R_0^{-1}(k) - \\ - U_0(k)P(k)U_0{}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}(\overline{y}_0(k) - U_0(k)\,\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k)).\end{aligned} \quad (9)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для матрицы $P(k+1)$ и вектора $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1)$, получим:

$$\begin{aligned}P(k+1) = P^{*}(k) - P^{*}(k)U_3{}^{\mathrm{T}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1) + \\ + U_3(k+1)P^{*}(k)U_3{}^{\mathrm{T}}(k+1)]^{-1}U_3(k+1)P^{*}(k),\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1) = \hat{\boldsymbol{c}}^{*}_{ls}(k) + P^{*}(k)U_3{}^{\mathrm{T}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1) + \\ + U_3(k+1)P^{*}(k)U_3{}^{\mathrm{T}}(k+1)]^{-1}(\overline{y}_3(k+1) - U_3(k+1)\,\hat{\boldsymbol{c}}^{*}_{ls}(k)).\end{aligned} \quad (11)$$

Для задания начальных значений $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(0), P\ (0)$ можно воспользоваться обычной формой метода наименьших квадратов при достаточном объеме «входных» и «выходных» параметров с использованием упрощенной модели «объекта» идентификации.

Ниже приведен двухступенчатый алгоритм расчета оценок параметров $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1)$. При формировании алгоритма исходили из предположения, что коррекция результатов расчета производится на каждом шаге измерительного процесса, т. е. $l = 1$ (в этом случае номер рекуррентного процесса k совпадает с номером измерений i, пересчет оценок происходит при каждом новом поступлении данных). В дальнейшем при формировании алгоритма, в зависимости от контекста, будем использовать либо индекс i, либо индекс k. Кроме того, как уже отмечалось, необходимым условием единственности оценки является условие: $N - l \geq 3n + 1$.

Алгоритм

1. Задание начальных значений $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(0), P\ (0)$,

Так как значения «выхода» модели пока не известны, то принимаем упрощенный вид модели:

$$\tilde{y}(i) = -\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j y(i-j) + \sum_{j=0}^{n} \tilde{b}_r u(i-j); \quad \tilde{y}(i) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i)\tilde{\tilde{c}}; \quad \tilde{\tilde{c}}^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n, \tilde{b}_0,...,\tilde{b}_n\right);$$

$$\bar{z}^{\mathrm{T}}(i) = (-y(i-1),...,-y(i-n), \ u(i),..., u(i-n)); \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_0} = 0,..., \frac{\tilde{d}_n}{\tilde{d}_0} = 0;$$

очевидно, в данном случае имеем $2n + 1$ оцениваемых параметра. Следовательно, для задания начальных условий достаточно накопить $2n + 1$ последовательных значений «входа» и «выхода».

1.1. Формируем матрицу «входов» U^0 и вектор «выходов» $\bar{y}^0$, $i=[-2n, -2n+1,...,0]$,

$$U^0 = \begin{bmatrix} \bar{z}^{\mathrm{T}}(-2n) \\ .... \\ \bar{z}^{\mathrm{T}}(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{y}^0 = \begin{bmatrix} y(-2n) \\ ..... \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

1.2. Рассчитываем начальные значения оценок:

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(0) = (U^0)^{-1}\bar{y}^0, \quad P^{-1}(0) = U^{0^{\mathrm{T}}}U^0.$$

2. Определение оценок параметров по упрощенной модели, $k = i = \lfloor \overline{0, n} \rfloor$.

2.1. Формируем матрицу «входа» и вектор «выхода», используем при этом упрощенный вид модели:

$$U_3(i+1) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1), \text{ а } \bar{y}_3(i+1) = \bar{y}(i+1).$$

2.2. Рассчитываем оценку $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1)$ и матрицу $P(k+1)$:

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1) = \hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k) + P(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1) +$$
$$+ U_3(k+1)P(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)]^{-1}(\bar{y}_3(k+1) - U_3(k+1)\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k));$$

$$P(k+1) = P(k) - P\ (k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1) +$$
$$+ U_3(k+1)P(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)]^{-1}U_3(k+1)P(k).$$

2.3. Рассчитываем значения «выхода» модели, используя ее упрощенный вид. Расчет осуществляется по формуле:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(i+1) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)\hat{\boldsymbol{c}}(k+1).$$

эти значения запоминаются.

2.4. Для $(i, k) < n$ выполняем рекурсию $i = i + 1$, $k = k + 1$ и переходим к п. 2.1.

3. Определение оценок параметров оптимальной настраиваемой модели для моментов $n \le (i,k) < N - 1$.

На этом интервале можем использовать полный вид оптимальной настраиваемой модели:

$$\widetilde{y}(i) = -\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j y(i-j) + \sum_{j=0}^{n} \widetilde{b}_j u(i-j) + \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{d}_l / \widetilde{d}_0)[y(i-j) - \widetilde{y}(i-j)],$$

однако при этом еще не достигнут заданный объем скользящей выборки.

3.1. Формируем матрицу «входа» и вектор «выхода», используем при этом полный вид модели:

$$U_3(k+1) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1) = (-y(i),\ldots,-y(i-n), u(i+1),\ldots,u(i-n),$$
$$(y(i) - \widetilde{y}(i)),\ldots,(y(i-n) - \widetilde{y}(i-n))),$$

$$\bar{y}_3(k+1) = \bar{y}(i+1).$$

3.2. Рассчитываем оценку $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1)$ и матрицу $P(k+1)$, используем при этом формулы, аналогичные приведенным в п. 2.2.

3.3. Рассчитываем значения «выхода» модели:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(i+1) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)\hat{\boldsymbol{c}}(k+1),$$

эти значения запоминаются.

3.4. Для $(i, k) < N - 1$ выполняем рекурсию $i = i + 1$, $k = k + 1$ и переходим к п. 3.1.

4. Определение оценок параметров оптимальной настраиваемой модели для моментов $(i,k) \ge N$, т. е. достигнут заданного объема скользящей выборки.

4.1. Формируем матрицу «входа» $U_0(k)$ и вектор «выхода» $\bar{y}_0(k)$, которые должны быть выведены из процесса идентификации:

$$U_0(k) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1-N), \bar{y}_0(k) = \bar{y}(i+1-N).$$

4.2. Формируем промежуточные оценки параметра $\hat{\boldsymbol{c}}^*_{ls}(k)$ и матрицы $P^*(k)$:

$$\hat{\boldsymbol{c}}^*_{ls}(k) = \hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k) - P(k)U_0^{\mathrm{T}}(k)[R_0^{-1}(k) -$$
$$- U_0(k)P(k)U_0^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}(\bar{y}_0(k) - U_0(k)\,\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k));$$

$$P^*(k) = P(k) + P(k)U_0^{\mathrm{T}}(k)[R_0^{-1}(k) -$$
$$- U_0(k)P(k+1)U_0^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}U_0(k)P(k).$$

4.3. Формируем матрицу «входа» $U_3(k+1)$ и вектор «выхода» $\bar{y}_3(k+1)$, которые вводятся на текущем шаге в процесс идентификации:

$$U_3(k+1) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1) = (-y(i),\ldots,-y(i-n), u(i+1),\ldots,u(i-n),$$
$$y(i) - \widetilde{y}(i),\ldots, y(i-n) - \widetilde{y}(i-n))),$$
$$\bar{y}_3(k+1) = \bar{y}(i+1).$$

4.4. Рассчитываем оценку $\hat{\boldsymbol{c}}_{ls}(k+1)$ и матрицу $P(k+1)$, при этом используем формулы, аналогичные приведенным в п. 2.2.

4.5. Рассчитываем значения «выхода» модели:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(i+1) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)\hat{\boldsymbol{c}}(k+1),$$

эти значения запоминаются.

4.6. Пока поступают новые данные «входа» и «выхода», выполняем рекурсию $i = i + 1$, $k = k + 1$ и переходим к п. 4.1.

5. Конец алгоритма.

Очевидно, предлагаемый рекуррентный метод оценки параметров информационных потоков, представленных в виде числовых потоков, по скользящей выборке заданного объема не дает каких-либо преимуществ в плане точности оценки и объема хранимой информации по сравнению с обычной формой метода наименьших квадратов. Однако использование предлагаемого метода позволяет избежать кропотливой процедуры обращения матриц. Как известно, порядок обращаемой матрицы в МНК равен числу оцениваемых параметров. При использовании предлагаемого рекуррентного метода порядок обращаемой матрицы равен числу обновленных данных l. В случае, когда пересчет параметров происходит при каждом новом поступлении данных $(l = 1)$, обращаемая матрица вырождается в скаляр.

Таким образом, использование предлагаемой модификации рекуррентной формы метода наименьших квадратов для оценки параметров формализованной модели данных позволяет избежать трудоемкой процедуры обращения матриц, с одной стороны, и учесть нестационарный вид модели — с другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
2. *Эйкхофф У.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1978.
3. *Цыпкин Я. З.* Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1981.