

A.B. Levina, A.S. Pakhomov

Support Of Noiseproof Coding With The Help Of Spline-Wavelets

Keywords: error correcting codes, spline-wavelets reconstruction.

Summary: In this article presents the error correcting codes, constructed on a spline-wavelets reconstruction, comparing of presented codes with the existing line codes is carried out.

А.Б. Левина, А.С. Пахомов

**ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ
СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ**

Введение

В настоящее время по каналам связи передаются данные со столь высокими требованиями к защите передаваемой информации, что удовлетворить эти требования традиционными методами – совершенствованием антенно-фидерных устройств, увеличением излучаемой мощности, снижением собственного шума приемника – оказывается экономически невыгодным или просто невозможным.

Одним из средств решения подобных несоответствий в системах передачи цифровой информации является применение помехоустойчивых кодов, лежащих в основе устройств кодирования/декодирования. Высокоэффективным средством решения данной проблемы является применение помехоустойчивого кодирования, основанного на введении искусственной избыточности в передаваемое сообщение. Помехоустойчивое кодирование передаваемой информации позволяет в приемной части системы обнаруживать и исправлять ошибки.

В настоящее время существует множество кодов и алгоритмов их декодирования, различающихся по выигрышу от кодирования, сложности реализации и многим другим параметрам. Для каждой конкретной радиосистемы должен быть выбран собственный алгоритм помехоустойчивого кодирования и декодирования, учитывающий ее особенности.

Важно учесть, что в ряде случаев, в первую очередь, в системах сбора информации с датчиков возникает ситуация, когда пропускная способность каналов низка (например, передача данных из скважин по гидравлическому или электромагнитному каналам), что ведет к требованию от помехоустойчивых кодов минимальной избыточности (длины кодового слова), достаточной для исправления заданного класса ошибок. В случае высокоскоростных шин передачи данных на печатных платах параллельным способом лишняя дорожка на дополнительный разряд избыточности приносит дополнительные затраты и наводки в схему, поэтому также необходимо использовать коды с минимальной избыточностью.

До сегодняшнего дня многие известные коды (Хэмминга, Рида-Маллера, Боуза-Чоудхури-Хоквенгема и т.п.) [1] применяют не системно, нет методики выбора кодов, обеспечивающих требуемые корректирующие свойства при минимальной избыточности в заданном диапазоне информационных разрядов. Успешному применению помехоустойчивых кодов разработчиками систем сбора и передачи данных препятствует тот факт, что для непосредственного выбора помехоустойчивого кода под конкретные условия эксплуатации систем требуются глубокие знания теории помехоустойчивого кодирования.

В данной работе представлен новый подход к построению помехоустойчивых надежных кодов, исправляющих ошибки. Для создания кодов используется теория сплайн-вэйвлетных разложений [2]. Суть построения кодов на основе сплайн-вэйвлетных разложений заключается в том, что для задания добавочных символов основной последовательности символов нет необходимости в использовании порождающих или проверочных матриц. Добавочные символы строятся на основе последовательности, которая является информационной (основной). Данный метод помогает сэкономить в вычислительной сложности и операциях преобразования [3].

Теория сплайн-вэйвлетных разложений

В данном разделе представлена теория сплайн-вэйвлетных разложений, основы данной теории можно найти в следующих работах [4, 3].

Пусть Z – множество всех целых чисел. На конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси рассмотрим сетку $X = \{x_j\}_{j \in Z}$ такую, что

$$X: \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots,$$

$$\text{для которой } \alpha = \lim_{j \rightarrow -\infty} x_j; \beta = \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j; \forall j \in Z.$$

Отрезки $[x_j, x_{j+1}]$ называются элементарными сеточными промежутками сетки X .

Рассмотрим сплайн w_j первого порядка ($j \in Z$):

$$\omega_j(t) = (t - x_j)(x_{j+1} - x_j)^{-1} \text{ при } t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = (x_{j+2} - t)(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1} \text{ при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = 0 \text{ при } t \in [x_j, x_{j+2}].$$

Для фиксированного $k \in Z$ положим: $\tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j$ при $j \leq k - 1$ и $\tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1}$ при $j \geq k$ и рассмотрим новую сетку $\tilde{X}: \dots < \tilde{x}_{-1} < \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots$

Сплайны первого порядка $\tilde{w}_j$, построенные с использованием новой сетки $\tilde{X}$, представляются такими же формулами, указанными ранее, с заменой узлов x_j сетки X на узлы $\tilde{x}_j$ сетки $\tilde{X}$. Для $j \notin \{k - 2, k - 1\}$ сплайны $\tilde{w}_j$ совпадают с рассмотренными ранее:

$$\tilde{w}_j(t) \equiv w_j(t) \forall j \leq k - 3; \tilde{w}_j(t) \equiv w_{j+1}(t) \forall j \geq k.$$

При $j \in \{k - 2, k - 1\}$ сплайны могут быть представлены в виде линейной комбинации сплайнов w_j и w_{j+1} :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k-2}(t) &= c_1 w_{k-2}(t) + c_2 w_{k-1}(t), \\ \tilde{w}_{k-1}(t) &= c'_1 w_{k-1}(t) + c'_2 w_k(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = \tilde{w}_{k-2}(x_k) \\ c'_1 = \tilde{w}_{k-1}(x_k) \\ c'_2 = 1, \end{cases}$$

получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k-2}(t) &= w_{k-2}(t) + \tilde{w}_{k-2}(x_k) w_{k-1}(t), \\ \tilde{w}_{k-1}(t) &= \tilde{w}_{k-1}(x_k) w_{k-1}(t) + w_k(t). \end{aligned}$$

Если рассмотреть узлы $\tilde{w}_{k-2}$ и $\tilde{w}_{k-1}$ на основе сетки X , то увидим что:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k-2}(x_k) &= \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}}; \\ \tilde{w}_{k-1}(x_k) &= \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}}. \end{aligned}$$

Данные преобразования дают нам два типа формул – формулы декомпозиции и формулы реконструкции. Во всех алгоритмах, связанных с сплайн-вейвлетными разло-

жениями, ключом всегда является сетка, а иногда и порядок выкидываемых узлов. В нашем случае мы с помощью данных разложений можем информационное сообщение превращать в кодовое слово.

Формулы декомпозиции разбивают передаваемый поток на основной поток, представляемый с помощью $\{c_i\}_{i \in N_0}$, и вэйвлетную составляющую b_{k-1} .

Формулы реконструкции восстанавливают открытый текст, используя основной поток и вэйвлетную составляющую. Сами формулы декомпозиции и реконструкции выглядят следующим образом.

На основе этих формул получаем, что формула декомпозиции для сплайн-вэйвлетного разложения первого порядка имеет вид:

$$b_n = c_n - \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+2} - x_n} c_{n-1} - \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_n} c_{n+1}. \quad (1)$$

В дальнейших вычислениях все операции будут проводиться по модулю 2, т.е. операция « $-$ » переходит в операцию « $+$ ». Формула (1) тогда примет следующий вид:

$$b_n = c_n + \frac{x_{n+2} + x_{n+1}}{x_{n+2} + x_n} c_{n-1} + \frac{x_{n+1} + x_n}{x_{n+2} + x_n} c_{n+1}. \quad (2)$$

Обратим внимание на выражение $x_{n+2} - x_n$. Оно равно либо 0, либо 1. Так как будем считать, что $0^{-1} = 1$, то выражение $(x_{n+2} - x_n)^{-1}$ всегда равно 1. Учитывая это, формула декомпозиции примет вид:

$$b_n = c_n + (x_{n+2} + x_{n+1})c_{n-1} + (x_{n+1} + x_n)c_{n+1}. \quad (3)$$

Формулы реконструкции сплайнов 1-го порядка:

$$c_n = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+2} - x_n} a_{n-1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_n} a_n + b_n, \text{ где } n - \text{номер выброшенного элемента.}$$

С помощью данных формул декомпозиции и реконструкции, будем формировать дополнительные проверочные символы к пространству кодовых слов, получая сплайн-вэйвлетный код. Наша задача оценить преимущества и недостатки сплайн-вэйвлетного кода по сравнению с классическими линейными кодами.

Построение сплайн-вэйвлетных линейных кодов

В данном разделе мы представим способ построения линейных кодов на основе описанного выше сплайн-вэйвлетного разложения.

Линейный код длины n , размерностью k и с минимальным расстоянием d называется $[n, k, d]$ – кодом.

В предлагаемой нами конструкции информационная часть линейного кода будет соответствовать последовательности $\{c_i\}_{i=1}^n$, а добавочные проверочные символы $\{c_i\}_{i=n+1}^k$ будут получаться с помощью формулы декомпозиции (3). В данной конструкции сетка совпадает с кодовым словом.

Для линейных дублирующих кодов добавочные символы строятся с помощью соответствующих им основных символов, т.е.

$$b_n = c_n.$$

Для помехоустойчивых кодов, построенных на основе сплайн-вэйвлетных разложений, добавочные символы строятся немного иначе. Если рассматривать сетку, рав-

ную самому кодовому слову, то формула добавочного элемента примет следующий вид:

$$b_n = c_n + c_{n+2}c_{n-1} + c_{n+1}c_{n-1} + c_{n+1}c_n + c_{n+1}^2.$$

Таким образом, для кодов, построенных на основе сплайн-вэйвлетных разложений, добавочный элемент зависит не только от соответствующего ему основного элемента, но также и от соседних, что создает бóльший лавинный эффект.

Сравнение сплайн-вэйвлетных кодов и линейного дублирующего кода (рис. 1 и 2) показывает, что сплайн-вэйвлетные коды обнаруживают со 100% вероятностью ошибки с максимальной кратностью. Минимальное значение вероятности обнаружения ошибки принимает на ошибке кратности (веса) 1, а дальше не убывает. Видно, что какие-то ошибки сплайн-вэйвлетный код обнаруживает хуже, чем линейный, но в отличие от линейного дублирующего кода сплайн-вейвлетный код имеет более равномерное распределение вероятностей обнаружения ошибок, особенно высоких кратностей.

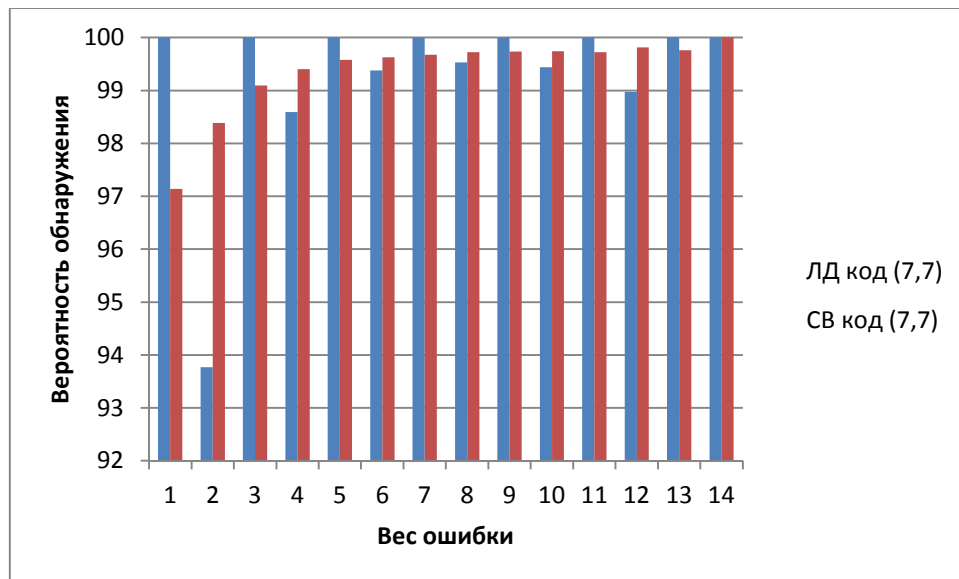
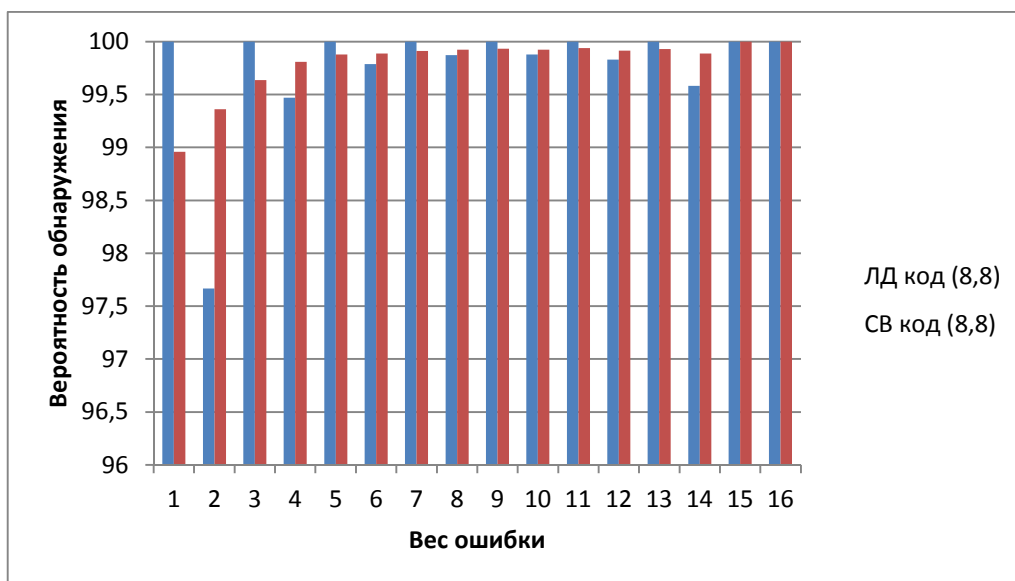


Рис. 1. Сравнение линейного дублирующего кода (7,7) и сплайн-вейвлетного кода (7,7) (слева – ЛД код (7,7), справа – СВ код (7,7))



*Рис. 2. Сравнение линейного дублирующего кода (8,8)
и сплайн-вэйвлетного кода (8,8) (слева – ЛД код (8,8), справа – СВ код (8,8))*

Заключение

В работе был представлен один из способов построения кодов на основе сплайн-вэйвлетных разложений. Сравнение сплайн-вейвлетных кодов с существующими показало, что сплайн-вэйвлетные коды не уступают линейным в способности обнаруживать ошибки.

Некоторые классы ошибок разработанные сплайн-вэйвлетные коды обнаруживают лучше, чем линейные. Это связано с тем, что добавочная последовательность не просто дублируется, а зависит сразу от нескольких элементов информационной последовательности.

Вероятности обнаружения ошибок у сплайн-вэйвлетных кодов носят более равномерный характер, чем у линейных, что доказывает их высокую надежность.

При заданной определенной вероятности обнаружения ошибок коды, на основе сплайн-вэйвлетных разложений, обладают меньшей избыточностью и не требуют передачи никаких данных в виде порождающих или проверочных матриц до установки канала связи.

Существует много способов построения сплайн-вэйвлетных кодов. Основой построения добавочных символов в теории сплайн-вэйвлетных разложений является «сетка». Поэтому добавочные символы можно строить на различных значениях «сетки». Сетка может быть как фиксированной, так и зависеть от кодового слова, для которого рассчитываются добавочные символы. Наиболее высокие вероятности обнаружения ошибок были получены на основе сетки, равной кодовому слову. Применение сплайн-вэйвлетной теории к теории кодирования открывает новые возможности для построения помехоустойчивых надежных кодов. По ряду показателей представленные коды являются более эффективными, чем существующие линейные коды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979. 745 с.
2. Левина А. Б. Сплайн-вэйвлеты и их некоторые применения. Дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. М. 2009. 215 с.
3. Демьянович Ю. К., Ходаковский В.А., Введение в теорию вэйвлетов. С.Пб. 2007. 49 с.
4. Демьянович Ю.К., Левина А.Б. О вэйвлетных разложениях линейных пространств над произвольным полем и о некоторых приложениях // Математическое моделирование. М. 2008. Т. 20. № 11.

REFERENCES:

1. Mac-Wiliams F., Sloen N. Theory of error detecting codes. M., 1979. 745 c.
2. Levina A.B. Splain-veivleti i ix nekotorii primeneniya. Dis. na coickanie yshen. stepenikand. fiz.-mat. Nayk. M. 2009. 215 p.
3. Demjanovich Y.K., Xodakovskiy V.A. Introduction in the wavelet theory. S.Pb, 2007. 49 P.
4. Demjanovich Y.K., Levina A.B. O vavilitnix razlogeniakh lineinix proctranstv nad proizvolnim polem // Math. Modeling. M. 2008. T. 20. № 11.